初学者のための関数方程式入門 (第二回)

@Metachick_2021

In mathematics, the art of proposing a question must be held of higher value than solving it.

—Georg Cantor

はじめに

微積分を含まない関数方程式 (Functional Equation) は競技数学において重要なテーマの一つであり、その解法にはパターンなどがなく、創造的で論理的思考力を駆使することが求められます。解法の難しさと数学的に興味深い性質を持つため多くの数学愛好家にとって非常に楽しい題材となっています。しかしながら、関数方程式については初学者向けの解説が少なく特に日本語の教材が乏しいという現状があります。そこで、本 PDF では関数方程式の基本的な概念から始めて、実際の問題を解くことを通じて解法をわかりやすく解説していきます。関数方程式に興味を持ち学びたいと思っている方はぜひ本 PDF を参考にしてください。関数方程式を通して数学的思考力を高め、楽しみながら数学を学んでいきましょう！！

本 PDF は、例題と問題を中心に構成されています。「例題」は丁寧に行間を追って見てください。「問題」は一度自分で考えてみてください。そして、問題を解くための道具をそろえたら章末の演習問題に挑戦してみてください。また、この PDF においては出典が明記されていない場合は自作となります。

最後に、本 PDF 作成にあたって、みかんさん (X:@_mikan_kankitsu)、翔子さん (X:@shoko_math) に様々な点で丁寧な校正を行っていただきました。お二人には、心から御礼申し上げます。

記号について

記号について、以下で定めます。

- $\mathbb{R}$... 実数全体の集合
- $\mathbb{Q}$... 有理数全体の集合
- $\mathbb{Z}$... 整数全体の集合
- $\mathbb{N}$... 正整数全体の集合
- $\mathbb{S}^+$... 集合 $\mathbb{S}$ の要素のうち、正であるものすべての集合
- $\mathbb{S}_{\geq x}$... 集合 $\mathbb{S}$ の要素のうち、x 以上であるものすべての集合
- $P(a,b)$...(x,y) に (a,b) を代入すること
- $\forall$... すべての
- $\exists$...〜が存在する

目次

1　有名な関数方程式

関数方程式を解いていると、有名な形に帰着されることが多々あります。ここでは代表的な形を二つほど紹介します。この問題のように、整数→有理数などと拡張していく手法は有効ですので抑えておきましょう。

1.1　Cauchy の関数方程式 ($\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$)

例題 1 Cauchy の関数方程式 ($\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$)

$f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ が任意の有理数 (x, y) の組に対して、以下を満たすとき f としてありうるものを全て求めよ。

$$f(x) + f(y) = f(x + y)$$

このシンプルな形の式が Cauchy の関数方程式です。確かにいろいろな関数方程式から帰着されそうです。この問題は意外と複雑です。ゆっくりと丁寧に解いていきましょう。

■1. 解の予想　いかなる時でも、解の予想は欠かせません。$f(x) = cx$ (c は任意) が唯一の解であると予想できます。特に、$P(0, 0) : f(0) = 2f(0)$ より、$f(0) = 0$ となります。

■2. n が正整数の範囲で $f(nx) = nf(x)$ を示す　まずは正整数を中心に考えていきます。任意の正整数 n, 有理数 x に対して、$f(nx) = nf(x)$ であることを数学的帰納法から示していきます。

Proof. $f(1 \cdot x) = 1 \cdot f(x)$ である。正整数 k に対して、$f(kx) = kf(x)$ と仮定する。このとき、以下が成立する。

$$P(kx, x) : f((k + 1)x) = f(kx) + f(x) = kf(x) + f(x) = (k + 1)f(x)$$

であるから、帰納的に任意の正整数 n, 有理数 x に対して $f(nx) = nf(x)$ であることが示された。 □

■3. n が整数の範囲で $f(nx) = nf(x)$ を示す　2 での結果を利用しましょう。

Proof. n を正整数とする。$P(nx, -nx) : f(0) = f(nx) + f(-nx)$ であるから、$-f(nx) = f(-nx)$ である。$f(nx) = nf(x)$ であるから、$f(-nx) = -f(nx) = -nf(x)$ を得る。任意の整数 n, 有理数 x に対して、$f(nx) = nf(x)$ であることが示された。 □

■4. r が有理数の範囲で $f(rx) = rf(x)$ を示す　3 での結果を利用しましょう。有理数 r は整数 m, n を用いて、$r = \frac{n}{m}$ と表すことができるので、これをそのまま適用します。

Proof. n, m を 0 でない整数とする。3 での結果より、

$$mf\left(\frac{n}{m}x\right) = f\left(m \cdot \frac{n}{m}x\right) = f(nx) = nf(x)$$

であるから、$f\left(\frac{n}{m}x\right) = \frac{n}{m}f(x)$ すなわち、$f(rx) = rf(x)$ を得る。 □

■5. 仕上げ　4 での結果に $x = 1$ を代入します。$f(r) = rf(1)$ であり、$f(1) = c$ (c は任意の実数) とすれば $f(x) = cx$ となります。逆に、$f(x) = cx$ は与式を満たすから求める f は $f(x) = cx$ です。(十分性の確認を忘れないようにしましょう)

1.2 Cauchy の関数方程式 ($\mathbb{R} \to \mathbb{R}$)

例題 2 Cauchy の関数方程式 ($\mathbb{R} \to \mathbb{R}$)

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が任意の実数 (x, y) の組に対して、以下を満たすとき f としてありうるものを全て求めよ。

$$f(x) + f(y) = f(x + y)$$

さて、Cauchy の関数方程式を有理数までで解くことはできました。では、実数に拡張するとどうなるでしょうか？ 実は選択公理というものを認めれば関数になんの制約もないとき、解が $f(x) = cx$ 以外にも病的な解がたくさん存在してしまいます。選択公理を認めた場合は競技数学というよりは本格的な大学数学になってしまうのでここでは詳しくは触れません。制約がある場合についてみていきます。以下が代表的な制約です。

- f がある 1 点で連続関数である
- f がある区間で単調増加 (減少) である
- f が可測である
- f がある区間で有界である

この中だと使用頻度が高いのはある 1 点で連続であるというものです。f がある 1 点で連続であるとき、f は加法性を用いることで連続関数であると分かり、有理数の稠密性より $f(x) = cx$ であることが得られます。最初から連続関数であることが与えられるケースも多いです。可測性や単調性に関しては選択公理と同じく本格的な大学数学になってしまうので、知識として知っておく程度でも良いかもしれません。

1.3 Cauchy の関数方程式-応用

ここでは、Cauchy の関数方程式に簡単に帰着できるものを紹介します。

例題 3 Cauchy の関数方程式-応用 1

$f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}^+$ が任意の有理数 (x, y) の組に対して、以下を満たすとき f としてありうるものを全て求めよ。

$$f(x) \cdot f(y) = f(x + y)$$

$g(x) = \log f(x)$ という置換を考えるのがポイントです。両辺の log を考えて、置換を適用してみましょう。すると、

$$g(x) + g(y) = g(x + y)$$

となって、Cauchy の関数方程式に帰着されて、$g(x) = cx$ (c は任意) を得ます。よって、$f(x) = e^{cx}$ (k, c は任意) となります。しかし、これは $f(x) = (e^c)^x$ ですから、$C = e^c$ とすれば $f(x) = C^x$ (C は任意の正実数) となりますね。

うまい置換を考えて、関数をより簡単な形に帰着されるのは頻出なので抑えておきましょう。

問題 1 Cauchy の関数方程式-応用 2

$f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{R}$ が任意の正の有理数 (x, y) の組に対して、以下を満たすとき f としてありうるものを全て求めよ。

$$f(x) + f(y) = f(xy)$$

以下では置換を考える練習をしてみましょう！

解答

$g(x) = f(k^x)$ なる置換を考える。

$$g(x) + g(y) = g(x + y)$$

に帰着されるから、$g(x) = cx$ である。よって、$f(k^x) = cx$ であるから、k^x を x に置き換えれば $f(x) = c \log_k x$ である。

次の問題は特に今までのテクニックを使う楽しい問題だと思います。

問題 2 Cauchy の関数方程式-応用 3

$f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{R}^+$ が任意の正の有理数 (x, y) の組に対して、以下を満たすとき f としてありうるものを全て求めよ。

$$f(x) \cdot f(y) = f(xy)$$

解答

$g(x) = \log f(e^x)$ なる置換を考える。

$$g(x) + g(y) = g(x + y)$$

に帰着されるから、$g(x) = cx$ である。よって、$\log f(e^x) = cx$ であるから、e^x を x に置き換えれば、$f(x) = e^{c \log x}$ である。また、$e^{c \log x} = x^c$ である。よって、$f(x) = x^c$ (c は任意の正実数) である。

1.4 Jensen の関数方程式

例題 4 Jensen の関数方程式

$f:\mathbb{Q}\to\mathbb{R}$ が任意の有理数 (x,y) の組に対して、以下を満たすとき f としてありうるものを全て求めよ。

$$\frac{f(x)+f(y)}{2}=f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

■1. 解の予想　やはり解の予想は欠かせません。解が多項式の形で与えられると仮定して、最高次数に着目するなどして、一次式であることがわかりますから、$f(x)=ax+b$ の形を代入して a,b の値の検討をしてみます。すると、a,b は特に制約が無さそうなことがわかります。ということで、暫定的には $f(x)=ax+b$ (a,b は任意) のみであると予想してみましょう。

■2.Cauchy の関数方程式への帰着　$f(x)=ax+b$ 型の関数が解であると予想できたらまずは $g(x)=f(x)-f(0)$ の置換を考えるべきです。定数項が 0 である場合、0 を代入するだけで項が消せるので、積極的にこの置換を施すべきです。実際に、今回の式ではこの置換を施しても元の式の f が g に変わるだけなので、元の問題に定数項が 0 であるという条件を加えて考えられるようになります。

$$\frac{g(x)+g(y)}{2}=g\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

$P(x,0)$ を考えると、$g(x)=2g\left(\frac{x}{2}\right)$ という式を得ます。これを与式に適用してみましょう。

$$g(x)+g(y)=2g\left(\frac{x+y}{2}\right)=g(x+y)$$

となって、Cauchy の関数方程式に帰着することができました。

■3. 仕上げ　Cauchy の関数方程式に帰着できたので $g(x)=ax$ を得ます。よって、$f(x)=ax+b$ (a,b は任意の実数) となります。

問題 3 AoPS 改題

$f:\mathbb{Q}\to\mathbb{R}$ が任意の有理数 (x,y,z) の組に対して、以下を満たすとき f としてありうるものを全て求めよ。

$$\frac{f(x)+f(y)+f(z)}{3}=f\left(\frac{x+y+z}{3}\right)$$

AoPS リンク：https://artofproblemsolving.com/community/c6h2459736p20515743

解答

$P\left(x,y,\frac{x+y}{2}\right)$ を考えることで、$\frac{f(x)+f(y)}{2}=f\left(\frac{x+y}{2}\right)$ に帰着され、これは Jensen の関数方程式である。よって、解は $f(x)=ax+b$ (a,b は任意) である。

1.5　章末問題

演習 1.5.1. $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{R}$ が任意の有理数 (x,y,z) の組に対して、以下を満たすとき f としてありうるものを全て求めよ。

$$f(x+y)+f(y+z)+f(z+x)=2f(x+y+z)$$

（ヒント：この問題は Cauchy の関数方程式の記述の練習も兼ねています。）

演習 1.5.2. $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{R}$ が任意の有理数 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ の組に対して、以下を満たすとき f としてありうるものを全て求めよ。

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}=f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)$$

ただし、n は 2 以上の整数である。

（ヒント：先ほど扱った問題の拡張になっていますね。余裕があれば二通りでの証明を考えてみてください。）

演習 1.5.3. $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{R}$ が任意の有理数 (x,y) の組に対して、以下を満たすとき f としてありうるものを全て求めよ。

$$f(x)+f(y)+2xy=f(x+y)$$

（ヒント：$f(x)$ を予想し、それ以外に解がないことを示すために適切な置換を考えましょう。）

演習 1.5.4. $f:\mathbb{Q}_{\geq 0}\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ が任意の有理数 (x,y) の組に対して、以下を満たすとき f としてありうるものを全て求めよ。

$$f(x)^2+f(y)^2=f(x^2+y^2)$$

（ヒント：$f(0)$ の値の候補が複数個出てくるかもしれません。その時は場合分けを考えてみましょう。重要なテクニックの一つです)

2　章末問題解答

解答 2.5.1

$$P(x,y,0):f(x)+f(y)=f(x+y)$$

であるから、Cauchy の関数方程式に帰着され、$f(x)=cx$ (c は任意) である。逆にこれは与式を満たす。

$\square$

(Cauchy の関数方程式を既知として解答を書くのはおそらく危険なので、実際の場面では Cauchy の関数方程式も丁寧に記述しましょう。この記述はしっかり練習しておくべきです。)

解答 2.5.2 $g(x)=f(x)-f(0)$ とする。このとき、以下が成り立つ。

$$\frac{g(x_1)+g(x_2)+\cdots+g(x_n)}{n}=g\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)$$

$P(x,0,0,\cdots,0)$ より、$\frac{g(x)}{n}=g\left(\frac{x}{n}\right)$ を得る。$P(x,y,0,\cdots,0)$ より以下を得る。

$$\frac{g(x)+g(y)}{n}=g\left(\frac{x+y}{n}\right)$$

ここで、$\frac{g(x)}{n}=g\left(\frac{x}{n}\right)$ を適用し、以下を得る。

$$g(x)+g(y)=g(x+y)$$

Cauchy の関数方程式より、$g(x)=ax$ である。よって、$f(x)=ax+b$ (a,b は任意) である。逆にこれは与式を満たす。

$\square$

解答 2.5.2(別解) $P\left(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}}{n-1}\right)$ より、

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_{n-1})}{n-1}=f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}}{n-1}\right)$$

となるから、帰納的に Jensen の関数方程式に帰着される。よって、$f(x)=ax+b$ (a,b は任意) である。逆にこれは与式を満たす。 $\square$

解答 2.5.3 $g(x)=f(x)-x^2$ とする。このとき、以下が成り立つ。

$$g(x)+g(y)=g(x+y)$$

これは Cauchy の関数方程式であるから、$g(x)=cx$ (c は任意) である。よって、$f(x)=x^2+cx$ (c は任意) である。逆にこれは与式を満たす。 $\square$

解答 2.5.4 $P(0,0)$ より、$f(0)$ は 0 または $\frac{1}{2}$ である。

■case1.$f(0)=0$ の場合

$$P(x,0): f(x)^2 = f(x^2)$$

であるから、これを与式に適用して、

$$f(x^2)+f(y^2)=f(x^2+y^2)$$

を得る。これは Cauchy の関数方程式に帰着されるから、$f(x)=cx$ (c は任意) が必要条件であるが、特に $f(x^2)=f(x)^2$ であるから $c=0,1$ である。逆にこれは与式を満たすから $f(x)=0, f(x)=x$ は解であり、case1 においてこれ以外に解は存在しない。

■case2.$f(0)=\frac{1}{2}$ の場合

$$P(x,0): f(x^2)=f(x)^2+\frac{1}{4}$$

であるから、これを与式に適用して

$$f(x^2)+f(y^2)=f(x^2+y^2)-\frac{1}{2}$$

を得る。ここで、$g(x)=f(x)-\frac{1}{2}$ なる置換を適用して

$$g(x^2)+g(y^2)=g(x^2+y^2)$$

を得る。これは Cauchy の関数方程式に帰着されるから、$g(x)=cx$ (c は任意) が必要条件である。一方で、$P(1,0): f(1)^2+f(0)^2=f(1)$ より、$f(1)=\frac{1}{2}$ である。よって、$g(0)=g(1)=0$ であるから、$c=0$ である。以上より、$f(x)=\frac{1}{2}$ は解であり、case2 において、これ以外に解は存在しない。

よって、求める解は $f(x)=0, f(x)=\frac{1}{2}, f(x)=x$ である。逆にこれは与式を満たす。 □

3　参考文献

- 鈴木晋一：『代数・解析パーフェクトマスター：めざせ，数学オリンピック』, 日本評論社，2017
- マスオ：『コーシーの関数方程式の解法と応用』，高校数学の美しい物語，
  https://manabitimes.jp/math/619，2024/04/13
- 数学の景色：『【f(x+y)=f(x)+f(y)】コーシーの関数方程式について詳しく』，
  https://mathlandscape.com/cauchy-func-eq/，2024/04/15
- Evan Chen：『Introduction to Functional Equations』，
  https://web.evanchen.cc/handouts/FuncEq-Intro/FuncEq-Intro.pdf，2024/04/15