Easy Little Inequalities #1 (answer)

@Metachick_2021

2024 年 6 月 18 日

1　解答

1.　x, y, z を $x = a + 3b + 2c,\ y = 2a + 3b + c,\ z = 5a + b + 3c$ で定める。このとき、

$$\frac{6a+b+2c}{a+3b+2c} + \frac{2a-2b+3c}{2a+3b+c} + \frac{8a+7b+6c}{5a+b+3c} = \frac{-x+y+z}{x} + \frac{x-2y+z}{y} + \frac{x+y+z}{z}$$

となる。さらに、

$$\frac{-x+y+z}{x} + \frac{x-2y+z}{y} + \frac{x+y+z}{z} = -2 + \frac{y}{x} + \frac{x}{y} + \frac{z}{y} + \frac{y}{z} + \frac{x}{z} + \frac{z}{x} \geq 4$$

である。ここで、最後の不等式は相加相乗平均の関係から得られる。

2.　$a = \tan x, b = \tan y,\ c = \tan z$ とすれば、条件から $x + y + z = \pi$ である。三角関数の関係式を用いて整理し、Jensen の不等式を用いることで

$$\begin{aligned}
\frac{\tan^2 x \tan^2 y \tan^2 z}{\frac{1}{\cos^2 x}\frac{1}{\cos^2 y}\frac{1}{\cos^2 z}} &= (\sin x \sin y \sin z)^2 \\
&\leq \left(\frac{\sin x + \sin y + \sin z}{3}\right)^6 \\
&\leq \left(\sin\left(\frac{x+y+z}{3}\right)\right)^6 = \frac{27}{64}
\end{aligned}$$

3.　x, y, z を $xyz = 1$ なる正の実数とすれば、(分母を払って計算することで) $\frac{1}{2+x} + \frac{1}{2+y} + \frac{1}{2+z} \leq 1$ を得る。ここで、

$$\begin{aligned}
\frac{a}{a^2+b+1} + \frac{b}{b^2+c+1} + \frac{c}{c^2+a+1} &\leq \frac{a}{2a+b} + \frac{b}{2b+c} + \frac{c}{2c+a} \\
&= \frac{1}{2+\frac{b}{a}} + \frac{1}{2+\frac{c}{b}} + \frac{1}{2+\frac{a}{c}} \\
&\leq 1
\end{aligned}$$

より、題意は示された。

4(解法 1). Radon の不等式より、

$$\frac{a^4}{b\sqrt{ca-b+2}}+\frac{b^4}{c\sqrt{ab-c+2}}+\frac{c^4}{a\sqrt{bc-a+2}}\geq\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{b\sqrt{ca-b+2}+c\sqrt{ab-c+2}+a\sqrt{bc-a+2}}$$

である。また、$a+b+c=1$ のもとで、$a^2+b^2+c^2\geq\frac{1}{3}$ である。$f(x)=\sqrt{x}$ は上に凸であり、$a+b+c=1$ なので Jensen の不等式から、$af(x)+bf(y)+cf(z)\leq f(ax+by+cz)$ となるので、

$$\frac{1}{9}\times\frac{1}{b\sqrt{ca-b+2}+c\sqrt{ab-c+2}+a\sqrt{bc-a+2}}\geq\frac{1}{9}\times\frac{1}{\sqrt{3abc+2(a+b+c)-a^2-b^2-c^2}}$$

となる。さらに、適当に AM-GM などを適用して、目標の式を得る。

4(解法 2). Hölder の不等式を $\boldsymbol{v}_1=(\sqrt[4]{x_1},\sqrt[4]{x_2},\sqrt[4]{x_3})$, $\boldsymbol{v}_2=(\sqrt[4]{y_1},\sqrt[4]{y_2},\sqrt[4]{y_3})$, $\boldsymbol{v}_3=(\sqrt[4]{z_1},\sqrt[4]{z_2},\sqrt[4]{z_3})$, $\boldsymbol{v}_4=(\frac{w_1}{\sqrt[4]{x_1y_1z_1}},\frac{w_2}{\sqrt[4]{x_2y_2z_2}},\frac{w_3}{\sqrt[4]{x_3y_3z_3}})$, として適用することで

$$\frac{w_1^4}{x_1y_1z_1}+\frac{w_2^4}{x_2y_2z_2}+\frac{w_3^4}{x_3y_3z_3}\geq\frac{(w_1+w_2+w_3)^4}{(x_1+x_2+x_3)(y_1+y_2+y_3)(z_1+z_2+z_3)}$$

という不等式を得る。$a+b+c=1$ ゆえ、$ca-b+2=(c+1)(a+1)$ などが成り立つことに注意して、上の不等式に $(w_1,w_2,w_3)=(a,b,c)$, $(x_1,x_2,x_3)=(b,c,a)$, $(y_1,y_2,y_3)=(\sqrt{c+1},\sqrt{a+1},\sqrt{b+1})$, $(z_1,z_2,z_3)=(\sqrt{a+1},\sqrt{b+1},\sqrt{c+1})$ を代入することで、

$$\frac{a^4}{b\sqrt{ca-b+2}}+\frac{b^4}{c\sqrt{ab-c+2}}+\frac{c^4}{a\sqrt{bc-a+2}}\geq\frac{(a+b+c)^4}{(a+b+c)(\sqrt{a+1}+\sqrt{b+1}+\sqrt{c+1})^2}$$

を得る。さらに、$f(x)=\sqrt{1+x}$ は上に凸であることから、Jensen の不等式より、

$$\sqrt{a+1}+\sqrt{b+1}+\sqrt{c+1}\leq3\sqrt{\frac{a+b+c}{3}+1}=2\sqrt{3}$$

であるので、題意は示された。

5. 正の範囲で $f(x)$ が微分可能であり、$f(e^x)$ が下に凸な関数 f において、$xy^{n-1}=1,\ x\geq1\geq y$ なる実数 x,y に対し $xf'(x)\leq yf'(y)$ が成立するとき $x_1x_2\cdots x_n=1$ なる実数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ について

$$f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)\geq nf(1)$$

が成り立つことを示す。まず、$g(x)=f(x)+(n-1)f(y)-nf(1)$ とおく。このとき、$g'(x)=f'(x)-\frac{1}{x}\sqrt[n-1]{\frac{1}{x}}f'(y)=\frac{xf'(x)-yf'(y)}{x}\leq0$ ゆえ、$x\leq1$ において、$g(x)\geq0$ である。このとき、$f(x)+(n-1)f(y)\geq nf(1)$ が成り立つ。ここで、$x+(n-1)y=n$ なる任意の x,y について、$f(e^x)+(n-1)f(e^y)\geq nf(1)$ が成り立つ。よって、Cirtoaje の RCF 定理に帰着される。

本問においては、$f(x)=x^3-2x+1$ とすれば良い。

2　感想

1. ★☆☆☆☆（分母を丸ごと置換するというのは割と合理的な気がする）
2. ★☆☆☆☆（典型的な tan 置換）
3. ★★★★☆（巧みな不等式による斉次化が難しい）
4. ★★★★☆（Radon を使用する場合は技巧的な Jensen が必要で、Hölder を使う場合は Jensen は愚直な適用で済むもののそもそも Hölder の適用が難しい）
5. ★★★★★（ゴリゴリの凸解析）