まぁまぁ楽しい物理の問題7選

高校物理を題材にした数学的難問パズル集

—@Metachick_2021

はじめに

数学的な処理がメインの物理の自作問題を集めてみました。たぶん、数学好きな人に刺さると思います。物理的な考察は少ないです。受験数学みたいに、誘導を全て抜いてあります。全部で 7 問です。あんまり多くないですが、頑張って作りました。全部解けたらクラスの人気者間違いなし！！

目次

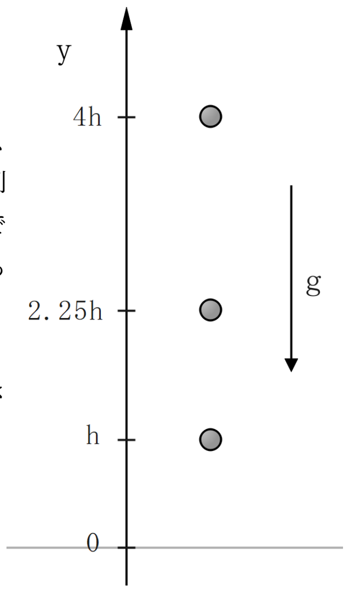
1　力学

1.1　物体の衝突

問題 1 落下する三球の軌跡 (★☆☆☆☆)

時刻 $t=0$ に右図のように位置 $h, 2.25h, 4h$ にある質量 m の小球 *1*、小球 *2*、小球 *3* が自由落下を始める。小球と $y=0$ にある床、小球と別の小球は弾性衝突をするものとして、時刻 $t=0$ から $t=6\sqrt{\frac{2h}{g}}$ までの小球 *3* の位置 y に関する y-t グラフの概形を描け。ただし、衝突する時刻や変位などの具体的な値は必要ない。

ただし、重力加速度を g 、鉛直上向きを正とする。なお、小球の大きさは無視できて、空気抵抗や摩擦は無いものとする。



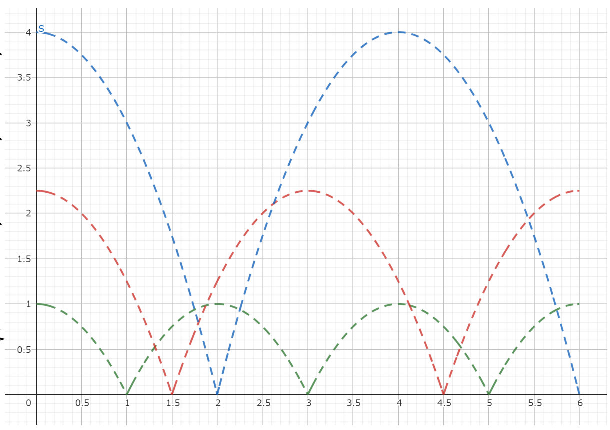
■発想

$t=6\sqrt{\frac{2h}{g}}$ までに小球や床は複数回衝突し、衝突するたびに式を立て直して計算をしているとかなり骨が折れる。そこで、等しい質量の二物体が弾性衝突したときには速度の交換が起こることに着目する。等しい二物体が正面から衝突したとき、見かけ上は衝突せずすり抜けたときと同じである。さらに、小球 3 は常に三球の中で y 座標が最大となるため、三球を独立して自由落下させたときのグラフを描き、そのうち各時刻で最大のものを球 3 の位置とする。

■各小球の y-t グラフを描く

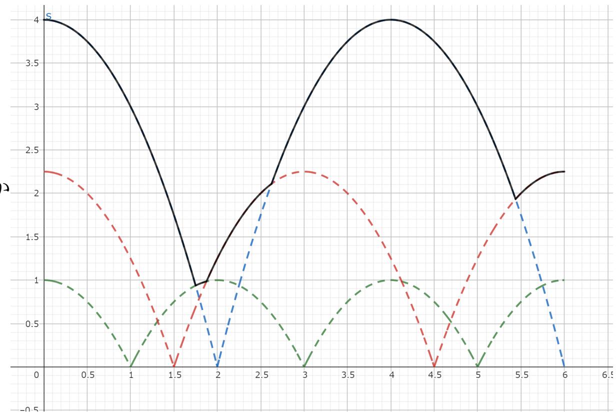
- 小球 1 は周期 $t=2\sqrt{\frac{2h}{g}}$ で周期的にバウンドする。
- 小球 2 は周期 $t=3\sqrt{\frac{2h}{g}}$ で周期的にバウンドする。
- 小球 3 は周期 $t=4\sqrt{\frac{2h}{g}}$ で周期的にバウンドする。

これら y-t グラフはは放物線を描くことに注意して、各小球の y-t グラフは右のようになる。



■小球 3 の y-t グラフを描く

よって、各時刻で最大のものが小球 3 の軌跡であるから、小球 3 のグラフの概形は以下のようになる。



■講評

難易度としては比較的低いものの、工夫しても各球の y-t グラフを描くための計算量がそれなりに多いので作業としては大変だった。

■感想

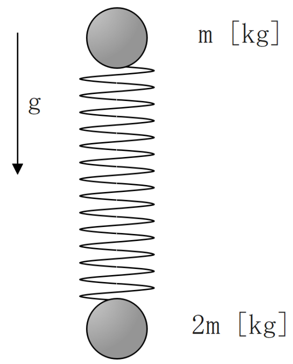
作問して公開したあとに指摘されて気が付いたのですが、この問題は競技プログラミングの有名問題の ants の全く同じ発想の問題のようです。ants の詳細はこちらから見ることができます。

1.2　単振動

問題 2 ばねでつながれた二物体の落下 (★★★☆☆)

右図のようにばね定数 k のばねでつながれた質量 $m,\ 2m$ の小球 *1*、小球 *2* があり、小球 *1* が手で押さえられて、全体が静止している。抑えていた手を離すと、ばねでつながれた小球は動き出した。手を離した時刻を 0 として、t 秒後の小球 *1* の位置を t の関数として表せ。

ただし、ばねの自然長を l 、重力加速度を g 、手を放す前の小球 *1* の位置を 0、鉛直下向きを正とする。なお、小球の大きさは無視できて、空気抵抗や摩擦は無いものとする。



■発想

まずは、どのような運動をするのか想像してみると、等加速度運動と単振動の組み合わせであることが予想できる。これを一度に考察するのは大変なので、できれば等加速度運動と単振動に分解して考えたい。これを実現するために、何かに乗った視点 (何かの系) で考えるのが良いという発想になる。

・小球 1 の系で考える

例えば、小球 1 から小球 2 を見ると、これは確かに単振動をする。ただし、この場合は小球 1 が等加速度運動をしないので結局計算が複雑になってしまう。したがって、常に加速度が等しい上手い点を探す必要がある。

・重心系で考える

そこで一つ知識として、こういった場合に、重心を考えるとうまくいくことを覚えておいてほしい。重心は、等速だったり、等加速度だったりとかなり嬉しい点になっている。今回も、重心系で運動を考察していくことによって、運動を等加速度運動と単振動に分離することができる。

■重心加速度の考察

まずは、事前準備として落下する二物体がつながれたばねの重心について考える。

ばねの長さを $l+x$ (ばねの伸びを x) として、小球 1、小球 2 の運動方程式を考える。働く力は、重力と弾性力である。また、それぞれの加速度が一致するとは限らないことに注意する。

$$\begin{cases} \text{小球 1:} \quad ma_1 = mg + kx \\ \text{小球 2:} \quad 2ma_2 = 2mg - kx \end{cases} \tag{1.2.1}$$

これらの式を足して、$m(a_1+2a_2) = 3mg$ を得る。整理して、$a_1 + 2a_2 = 3g = \text{一定}$ を得る。

小球 1、小球 2 の位置をそれぞれ $x_1,\ x_2$ とする。このとき、重心の位置は $x_g = \frac{mx_1+2mx_2}{m+2m}$ である。これを二回微分して、重心の加速度は $a_g = \frac{ma_1+2ma_2}{m+2m} = \frac{3mg}{3m} = g =$ 一定 である。以上より、重心の加速度は一定であることがわかる。(重心加速度を考察するというよりは、重心系で不動なものを考察するというモチベーション)

■重心系で整理する

重心に乗った状態 (重心系) で小球 1、小球 2 の運動方程式について考える。重心系での、加速度を $a_1',\ a_2'$ とし、ばね全体の伸びを x とする。

$$\begin{cases} \text{小球 1:} \quad m(a_1'+g) = mg + k_1 x \\ \text{小球 2:} \quad 2m(a_2'+g) = 2mg - k_2 x \end{cases} \tag{1.2.2}$$

重心系では、ばね定数はそれぞれ変化することに注意する。具体的には、ばねを重心で二つに切断した状況を考えればよい。

通常のばねは k [N] で、1 [m] 伸びるが、小球 1 と重心の間のばねは k [N] で、$\frac{2m}{m+2m} = \frac{2}{3}$ [m] 伸びる。すなわち、ばね定数 k_1 は $\frac{3}{2}k$ である。同様に、小球 2 と重心の間のばねのばね定数 k_2 は $3k$ である。

この新しいばね定数を代入して、

$$\begin{cases} \text{小球 1:} \quad m(a_1'+g) = mg + \frac{3}{2}kx \\ \text{小球 2:} \quad 2m(a_2'+g) = 2mg - 3kx \end{cases} \tag{1.2.3}$$

を得る。これを整理して、

$$\begin{cases} \text{小球 1:} \quad ma_1' = \frac{3}{2}kx \\ \text{小球 2:} \quad 2ma_2' = -3kx \end{cases} \tag{1.2.4}$$

を得る。よって、重心系では二つの小球はどちらも単振動をする。実験室系で見れば、小球 1 は、等加速度運動と単振動の組み合わせであることがわかる。小球 1 の周期 T と角振動数 ω はそれぞれ

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2m}{3k}},\ \omega = \sqrt{\frac{3k}{2m}}$$

である。位置を導出するには、単振動の振幅を求める必要がある。

■単振動の振幅を求める

小球 1 の単振動の振幅を考える。運動方程式を考えることによって、$x = 0$ すなわち、ばねの伸びが 0 の場所で振動中心となることがわかる。手を放す前の小球 1 側のばねの伸びは、重心系で見ると $\frac{2}{3} \cdot \frac{2mg}{k}$ である。手を放す前のばねの伸びが最大の伸びであるから、振幅は $\frac{4mg}{3k}$ である。

■仕上げ

重心は、自由落下をしていくことに注意して、求める位置 $X(t)$ は

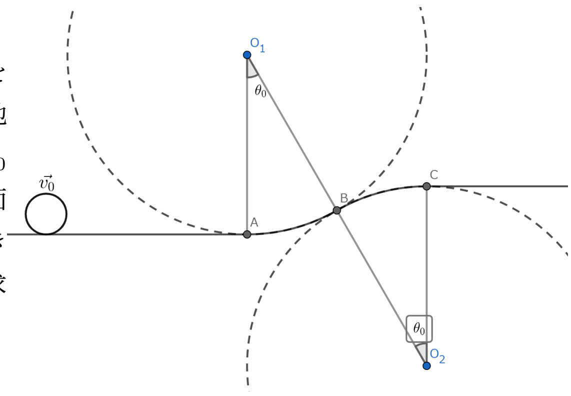
$$X(t) = \frac{1}{2}gt^2 + \frac{4mg}{3k}\sin\sqrt{\frac{3k}{2m}}t \tag{1.2.5}$$

である。よって、解答は $\boxed{\frac{1}{2}gt^2 + \frac{4mg}{3k}\sin\sqrt{\frac{3k}{2m}}t}$ である。

1.3 円運動

問題 3 非等速円運動 (★★☆☆☆)

質量 m の小球に、点 A 左方から正の初速度 v_0 を加え、右図のような地面を滑らすことを考える。地面は、AB, BC 間が半径が r で、中心角が鋭角 θ_0 の円弧で構成されている。このとき、小球が地面から一度も離れずに点 C へと到達することができるような正の初速度 v_0 が存在する θ_0 の範囲を求めよ。



■発想

この問題は円運動にまつわる問題であるから、向心力を忘れないようにする。

- v_0 が小さい→ 点 C まで到達できない。
- v_0 が大きい → 点 B 以降で地面から離れてしまう。
- θ_0 が大きい → 初速度を大きくせざるを得ないが、大きくしすぎると小球が地面から離れてしまう。

■$A-B$ 間での小球の振る舞い

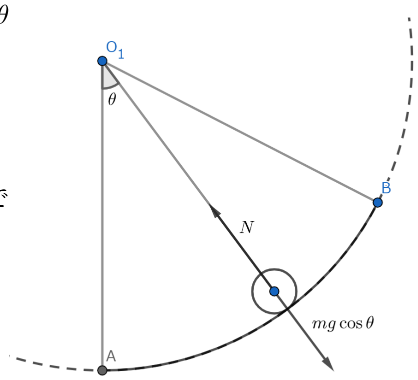
右図のように角 θ をとる。中心方向を正として、角 θ における運動方程式を考える。

$$ma = N - mg\cos\theta$$

ここで、速度を v_θ とすれば、円運動の加速度は $\frac{v_\theta^2}{r}$ である。したがって、運動方程式は以下のようになる。

$$m\frac{v_\theta^2}{r} = N - mg\cos\theta$$

よって、$N = m\frac{v_\theta^2}{r} + mg\cos\theta$ を得る。



ここで、小球が地面から離れないためには、$N \geq 0$ でなければならないが、$m\frac{v_\theta^2}{r} + mg\cos\theta$ は常に正であるから $A-B$ 間で小球が地面から離れることはない。

※ 後で点 C に到達できるかを判定するので、点 B に到達できるかを判定する必要はない。

■$B - C$ **間での小球の振る舞い**

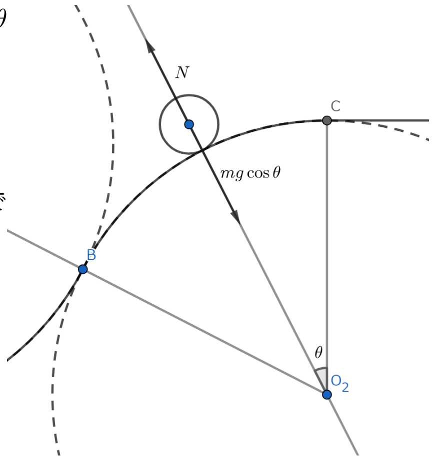
右図のように角 θ をとる。中心方向を正として、角 θ における運動方程式を考える。

$$ma = mg\cos\theta - N$$

ここで、速度を v_θ とすれば、円運動の加速度は $\frac{v_\theta^2}{r}$ である。したがって、運動方程式は以下のようになる。

$$m\frac{v_\theta^2}{r} = mg\cos\theta - N$$

よって、$N = -m\frac{v_\theta^2}{r} + mg\cos\theta$ を得る。



非保存力が無いから、力学的エネルギー保存則が成り立つ。点 A を位置エネルギーの基準の高さとする。

$$\frac{1}{2}m{v_0}^2 = \frac{1}{2}m{v_\theta}^2 + mgh$$

$h = r(1-\cos\theta_0) + r(\cos\theta - cos\theta_0)$ である。よって、${v_\theta}^2 = {v_0}^2 - 2gr(1+\cos\theta - 2\cos\theta_0)$ を得る。ここで、${v_\theta}^2 \geq 0$ であるから、

$${v_0}^2 - 2gr(1+\cos\theta-2\cos\theta_0) \geq 0$$

を得る。これを整理して、v_0 の条件は

$${v_0}^2 \geq 2gr(1+\cos\theta-2\cos\theta_0) \tag{1.3.1}$$

である。$0 < \theta \leq \theta_0$ である。これを式 (1) とする。

${v_\theta}^2 = {v_0}^2 - 2gr(1+\cos\theta-2\cos\theta_0)$ を v_θ に代入して、$N = mg(2+3\cos\theta-4\cos\theta_0) - m\frac{{v_0}^2}{r}$ を得る。小球が地面から離れないためには、$N \geq 0$ でなければならないので、

$$mg(2+3\cos\theta-4\cos\theta_0) - m\frac{{v_0}^2}{r} \geq 0$$

を得る。これを整理して、v_0 の条件は

$${v_0}^2 \leq gr(2+3\cos\theta-4\cos\theta_0) \tag{1.3.2}$$

である。$0 < \theta \leq \theta_0$ である。これを式 (2) とする。

■$A-C$ **間での小球の振る舞い**

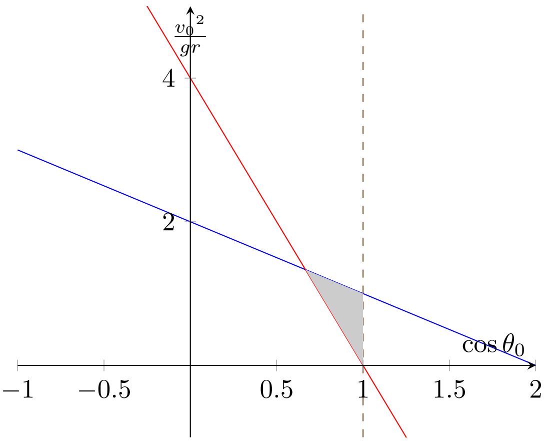
式 (1), 式 (2) から、v_0 の条件は以下のようになる。

$$\begin{cases} {v_0}^2 \geq gr(2+2\cos\theta-4\cos\theta_0) \\ {v_0}^2 \leq gr(2+3\cos\theta-4\cos\theta_0) \end{cases} \tag{1.3.3}$$

このとき、θ は $0<\theta\leq\theta_0$ を任意に独立して動くので、それぞれ最も v_0 の範囲が狭まるような θ を考えて、以下を得る。

$$\begin{cases} {v_0}^2 \geq gr(4-4\cos\theta_0) \\ {v_0}^2 \leq gr(2-\cos\theta_0) \end{cases} \tag{1.3.4}$$

$\cos\theta_0$ と $\frac{{v_0}^2}{gr}$ のグラフを描く。ここで、$\cos\theta_0$ が 1 以下であることに注意する。



g, r は定数であるから、$\frac{{v_0}^2}{gr}$ は v_0 が変化すれば任意の 0 以上の値をとる。よって、グラフの塗りつぶし部分には対応する v_0 が存在する。このことから、ある v_0 が存在するような $\cos\theta_0$ の範囲は、$\frac{2}{3}\leq\cos\theta_0<1$ となる。

よって、正解は $\boxed{0<\theta_0\leq\arccos\frac{2}{3}}$ である。

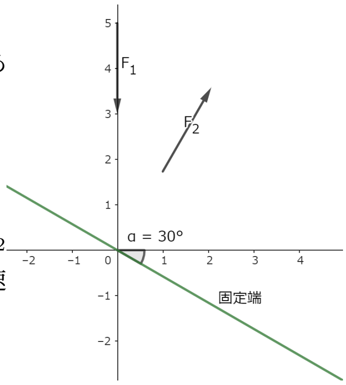
■**感想**

難易度としては、方針も立ちやすいですし、解説にあるほど丁寧に示さなくても解けることから比較的低いと思います。この図示をする感じが京大とかの数学っぽくて良くないですか？

2　波動

2.1　波の式

問題 4 平面の定常波 (★☆☆☆☆)



右図のように座標平面上に、y 軸負方向に進む波長 λ の進行波 F_1 があり、以下の式で表される。

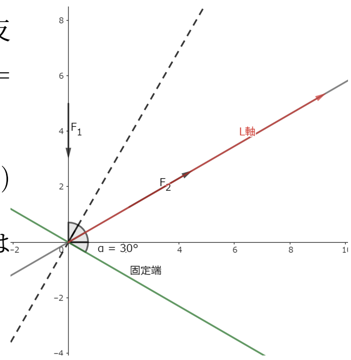
$$F_1(x,y,t) = A\sin\left\{2\pi f\left(t+\frac{y}{v}\right)\right\}$$

F_1 が x 軸と 30° を成す壁 固定端 と反射し、反射波 F_2 をつくる。F_1, F_2 が作る定常波の節を整数 n と λ を用いて表せ。ただし、波はすべて速さ v で進み、減衰することはないものとする。

■発想

反射の法則から反射波の進行方向がわかるので、まずはその方向に新しく軸 (後述する L 軸) をとる。その後は一般的な直線の波の式と同様の発想で解くことができる。なお、固定端であることに注意したい。定常波の節は通常通り和積公式を使って求める。

■反射波の式



反射の法則から反射波 F_2 が右図の方向に進むことがわかる。反射波の進行方向に L 軸をとり、原点を $(0,0)$ とし、$F_2(x,y,t) = F_2'(l,t)$ とする。このとき、固定端反射であることに注意して、

$$F_2'(l,t) = -F_1(x,-l,t) \tag{2.1.1}$$

であるので、$F_2'(l,t) = -A\sin\left\{2\pi f\left(t-\frac{l}{v}\right)\right\}$ を得る。$L=l$ は $y = -\sqrt{3}x + 2l$ ゆえ、$l = \frac{\sqrt{3}x+y}{2}$ である。

よって、以下を得る。

$$F_2(x,y,t) = F_2'\left(\frac{\sqrt{3}x+y}{2}, t\right) = -A\sin\left\{2\pi f\left(t-\frac{\sqrt{3}x+y}{2v}\right)\right\}$$

■定常波の節

定常波は和積公式などを用いて

$$F_1(x,y,t)+F_2(x,y,t) = 2A\sin\left\{2\pi f\left(\frac{\sqrt{3}x+3y}{2v}\right)\right\}\cos\left\{2\pi f\left(t+\frac{-\sqrt{3}x+y}{4v}\right)\right\} \tag{2.1.2}$$

となるので、節は λ, n を用いて $\boxed{y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{2}{3}n\lambda}$ となる。

3　電磁気

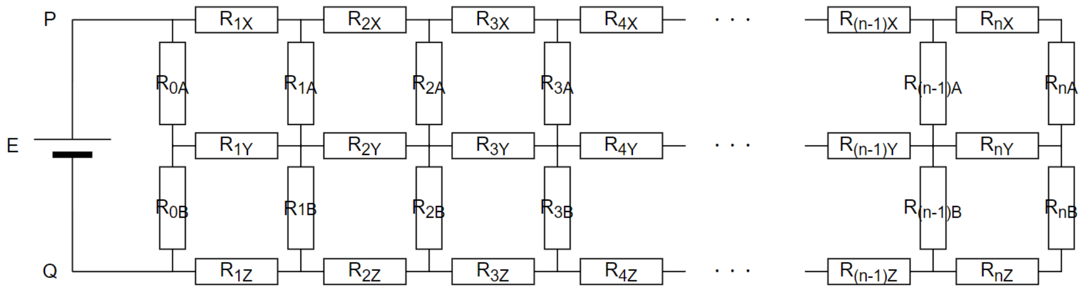
3.1　抵抗を含む回路

問題 5 無限格子型回路 (★★★★☆)

下図のような電池と図のように命名された $5n+2$ 個の抵抗が格子状に接続された回路がある。電池の起電力は E 、抵抗 $R_{iA}, R_{iB}, R_{iX}, R_{iY}, R_{iZ}$ の抵抗値はそれぞれ $2r, 2r, r, (\sqrt{5}+\sqrt{7})r, r$ であり、導線の抵抗は考えないものとする。図の点 PQ 間の電流の大きさを I_n とするとき、

$$\lim_{n\to\infty} I_n$$

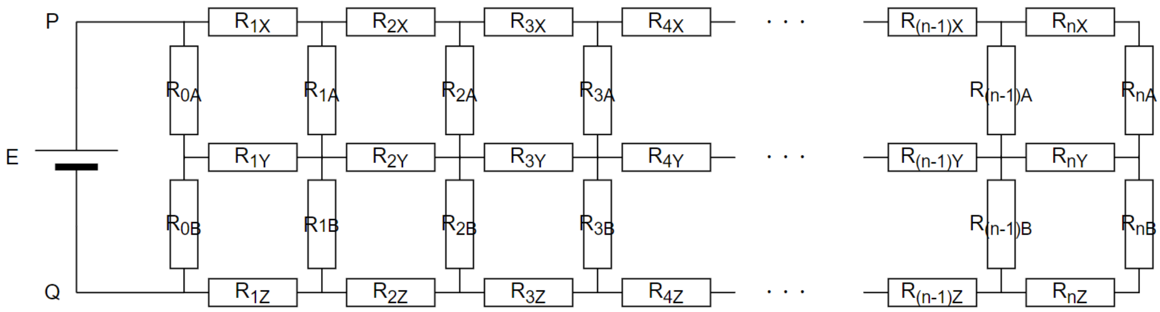
を求めよ。



■発想

一般的な無限梯子型回路に似ているが、より複雑であり簡単には解くことができない。今回の回路には、対称性 (線対称) があるので、この事実とキルヒホッフの法則を組み合わせてよりシンプルな等価回路を作成し、無限梯子型回路に帰着させる。その後は、通常通り、漸化式を解いて極限を求める。非常に複雑である。

■回路の対称性



回路は上下で線対称なので物理的に、上下の対応する点において電圧や電流は等しくなる。このこと、特に抵抗 R_{0A}, R_{0B} に流れる電流は等しいことを踏まえて、R_{0A}, R_{0B} の間の点について考える。抵抗 R_{0A}, R_{0B} に流れる電流を I_0 としたとき、R_{0A}, R_{0B} の間の点について、キルヒホッフの第一法則 (流入する電流と流出する電流の大きさは等しい) を考えると、右側 (抵抗 R_{1Y}) には電流が流れないことがわかる。故に、この抵抗は取り除いてよく、これをドミノ倒しのように繰り返すことで R_{iY} には電流が流れないことがわかる。

補題 1 回路の対称性による抵抗の削除

抵抗 R_{iY} には電流が流れない。

Proof. i に関する数学的帰納法で示す。

(i) $i=1$ での成立を示す

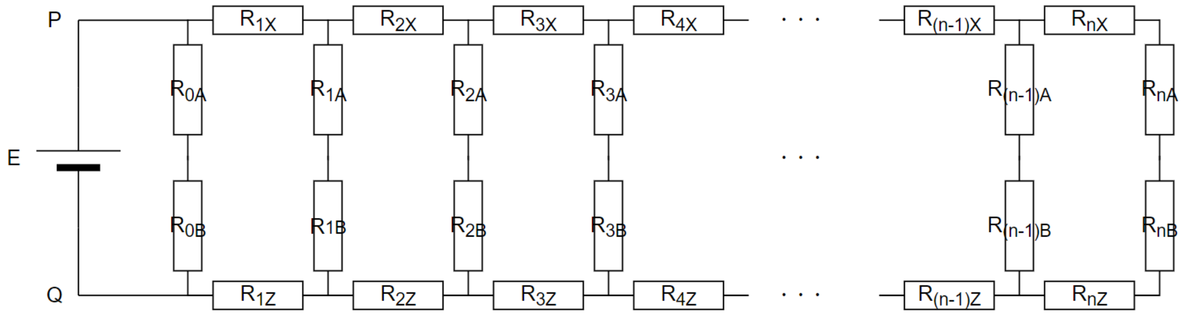
回路の対称性から、抵抗 R_{0A}, R_{0B} に流れる電流は等しく、R_{0A}, R_{0B} の間の点において、キルヒホッフの法則より、抵抗 R_{1Y} には電流が流れない。

(ii) $i=k$ での成立を仮定して、$i=k+1$ での成立を示す

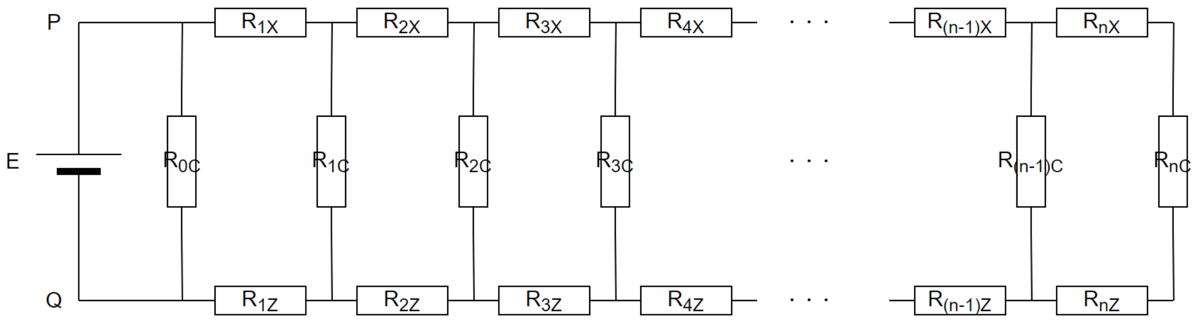
回路の対称性から、抵抗 R_{kA}, R_{kB} に流れる電流は等しく、R_{kA}, R_{kB} の間の点において、その左側は R_{kY} は無いものと考えてよく、キルヒホッフの法則より、抵抗 $R_{(k+1)Y}$ には電流が流れない。

よって、題意は示された。 □

このことから、抵抗 R_{iY} を全て取り除き、以下の等価回路を得る。



さらに、抵抗 R_{iA}, R_{iB} を合成することで、以下の等価回路を得る。このときの抵抗 R_{iC} の抵抗は $4r$ である。



これは、無限梯子型回路である。以降、漸化式を用いてこの回路を考察していく。

■**無限梯子型回路**

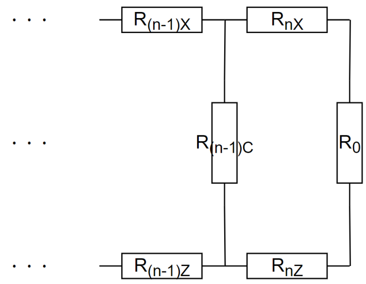
以下のように、抵抗 R_{nC} を R_0 とし、回路を整理する。R_0, R_{nX}, R_{nZ} を直列合成し、$R_{(n-1)C}$ と R_0, R_{nX}, R_{nZ} の合成抵抗をさらに並列合成して R_1 とみなす。このとき、

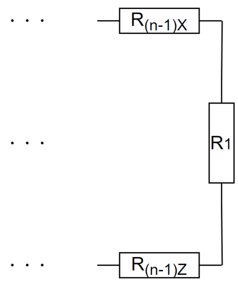
$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_{(n-1)C}} + \frac{1}{R_0 + R_{nX} + R_{nZ}} = \frac{1}{4r} + \frac{1}{R_0 + 2r} \tag{3.1.1}$$

が成り立つので、

$$R_1 = \frac{4r(R_0 + 2r)}{6r + R_0}$$

を得る。





同様の操作を繰り返すことで、

$$\frac{1}{R_{k+1}} = \frac{1}{R_{(n-k-1)C}} + \frac{1}{R_k + R_{(n-k)X} + R_{(n-k)Z}} = \frac{1}{4r} + \frac{1}{R_k + 2r} \tag{3.1.2}$$

を得るから、

$$R_{k+1} = \frac{4r \cdot R_k + 8r^2}{R_k + 6r}$$

という漸化式を得る。これは一次分数型の漸化式であるので、定石どおりに解く。

■**漸化式を解く**

受験数学などでは、誘導が付くことが多い一次分数型の漸化式であるが、誘導なしでできるようにした方が良い。まず、特性方程式を考える。

$$\alpha = \frac{4r\alpha + 8r^2}{\alpha + 6r} \tag{3.1.3}$$

を解いて、$\alpha = -r \pm 3r$ を得る。漸化式を解く上ではプラスマイナスはどちらでも構わないが、今回は正のものを採用する。すなわち、$\alpha = 2r$ とする。$R'_k = R_k - \alpha$ とする。このとき、

$$R'_{k+1} = R_{k+1} - \alpha = \frac{2r(R_k - 2r^2)}{R_k + 6r} = \frac{2rR'_k}{R'_k + 8r} \tag{3.1.4}$$

であるので、より簡単な形に帰着することができた。

$R''_k = \frac{1}{R'_k}$ として、

$$R''_{k+1} = 4R''_k + \frac{1}{2r} \tag{3.1.5}$$

であるので、$R''_0 = \frac{1}{R'_0} = \frac{1}{R_0 - 2r} = \frac{1}{2r}$ と併せて、

$$R''_k = \frac{2}{3r} \cdot 4^k - \frac{1}{6r}$$

を得る。よって、

$$R_k = R'_k + 2r = \frac{1}{\frac{2}{3r} \cdot 4^k - \frac{1}{6r}} + 2r$$

を得る。最後に、回路全体の合成抵抗が R_n であることを考えると、オームの法則から、

$$I_n = \frac{E}{R_n} = \frac{E}{\frac{1}{\frac{2}{3r} \cdot 4^n - \frac{1}{6r}} + 2r}$$

を得るから、

$$\lim_{n \to \infty} I_n = \lim_{n \to \infty} \frac{E}{\frac{1}{\frac{2}{3r} \cdot 4^n - \frac{1}{6r}} + 2r} = \boxed{\frac{E}{2r}}$$

である。

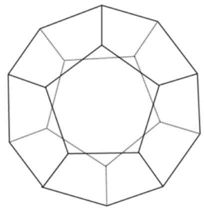
■講評

まず回路の対称性に気が付くことが必要であったが、そこに気が付いたとしても梯子型回路が漸化式でうまく計算できることを知っていなければ見通しが悪くとても難しかった。さらに、数学的な処理も大変重く、数学の問題として解いても、そこらへんの東工大数学よりも難しかった思われる。エクストリーム難問ではないが、十分に難問であろう。

3.2 抵抗を含む回路 2

問題 6 立体的な回路 (★★☆☆☆)

右図のような正十二面体の辺にそって抵抗の無視できない導線が配置されており、一辺あたりの抵抗値は r である。このとき、ある頂点 X と、中心に関して X と対称な位置にある頂点 Y の間の合成抵抗を求めよ。ただし、正十二面体の辺が交わっている箇所では、導線も交わっているものとする。



■発想

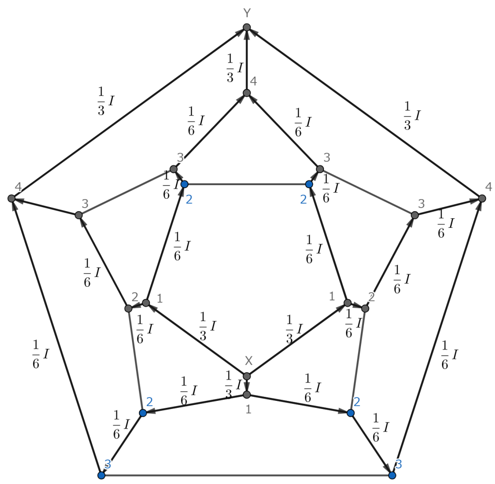
空間を考えるのは難しいので正十二面体の平面グラフを考える。その後は、回路の対称性を利用して電流を分配する。

■正十二面体の平面グラフ

正十二面体の平面グラフを考えて、等価な回路を平面に図示する。ついでに、頂点 X からの (辺を伝って移動したときの) 距離を書き込むことで、以下の回路を得る。

■電流の分配

回路には対称性があるから、電流が等しく分配されることに着目する。頂点 X からの距離が小さい頂点から大きい頂点へと電流が流れる。これを利用して、すべての辺に流れる電流の大きさを書き込んでいく。すると、右図のようになる。



XY 間の電圧を V 、正十二面体でない側で XY を単純に導線で接続したときに流れる電流を I とすれば求めるべき合成抵抗は $\frac{V}{I}$ である。

ここで、(どの経路に対しても) 回路方程式が

$$V = \frac{1}{3}rI + \frac{1}{6}rI + \frac{1}{6}rI + \frac{1}{6}rI + \frac{1}{3}rI \tag{3.2.1}$$

であるので整理して、$V = \frac{7}{6}rI$ となり、求める合成抵抗は $\boxed{\frac{7}{6}r}$ となる。

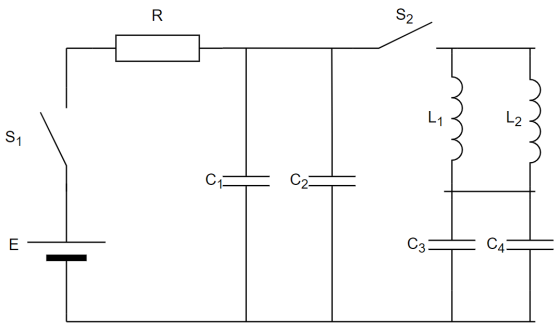
■講評

なぜ回路の問題で空間認知をしなければならないのか意味不明である。平面グラフを知っていると見通しが良くなった。対称性を使用するパートも非常に難しい。

3.3 コンデンサ・コイルを含む回路

問題 7 複雑な回路の電気振動 (★★★☆☆)

右図のような起電力 E の電池、抵抗 R の抵抗 *1*、静電容量 C_1, C_2, C_3, C_4 のコンデンサ *1,2,3,4*、自己インダクタンス L_1, L_2、相互インダクタンス M のコイル *1,2*、スイッチ *1,2* を含む回路がある。はじめ、スイッチ *1,2* は共に開いており、全てのコンデンサに電荷は蓄えられていなかった。スイッチ *1* を閉じて十分に時間がたった後に、スイッチ *1* を開き、スイッチ *2* を閉じたところ電気振動が起こった。この電気振動の周期を求めよ。ただし、$M^2 < L_1 L_2$ とする。

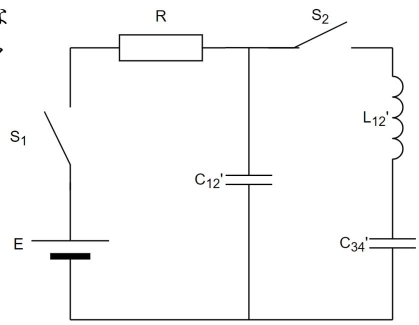


■発想

複雑な回路であるが、コンデンサやコイルの合成を行って、よりシンプルな等価回路を作成し、その回路について電気振動を考える。コイルには、相互インダクタンスがあることに注意したい。

■等価回路の作成

コンデンサとコイルの合成を行うことで、右のような等価回路を得る。合成後の静電容量 C'_{12}, C'_{34} と自己インダクタンス L'_{12} を求める。



コンデンサの合成に関しては、

$$C'_{12} = C_1 + C_2,\ C'_{34} = C_3 + C_4$$

である。

次にコイルの合成を考える。電流回路図下向きを正にしてコイル 1 に流れる I_1 、コイル 2 に流れる電流を I_2 とする。ここで、$I'_{12} = I_1 + I_2$ とする。電位差について考えることで

$$L_1 \frac{\Delta I_1}{\Delta t} + M \frac{\Delta I_2}{\Delta t} = L_2 \frac{\Delta I_2}{\Delta t} + M \frac{\Delta I_1}{\Delta t} \tag{3.3.1}$$

を得る。これより、以下を得る。

$$\frac{\Delta I_1}{\Delta t} = \frac{L_2 - M}{L_1 + L_2 - 2M} \frac{\Delta I'_{12}}{\Delta t},\ \frac{\Delta I_2}{\Delta t} = \frac{L_1 - M}{L_1 + L_2 - 2M} \frac{\Delta I'_{12}}{\Delta t} \tag{3.3.2}$$

以上より、

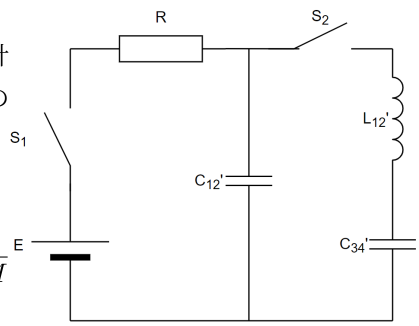
$$L_1\frac{\Delta I_1}{\Delta t}+M\frac{\Delta I_2}{\Delta t}=L_2\frac{\Delta I_2}{\Delta t}+M\frac{\Delta I_1}{\Delta t}=\frac{L_1L_2-M^2}{L_1+L_2-2M}\frac{\Delta I'_{12}}{\Delta t} \tag{3.3.3}$$

である。よって、合成インダクタンス L'_{12} は以下のようになる。これは AM-GM などから正である。

$$L'_{12}=\frac{L_1L_2-M^2}{L_1+L_2-2M}$$

■電気振動の周期の計算

右の回路の電気振動を求める。$C'_{12}, C'_{34}, L'_{12}$ として計算し、最後に代入する。ここで各パラメータは以下のとおりである。



$$C'_{12}=C_1+C_2,\ C'_{34}=C_3+C_4,\ L'_{12}=\frac{L_1L_2-M^2}{L_1+L_2-2M}$$

電気振動で交流電流が流れるとみなして、キルヒホッフの法則を適用する。コンデンサ 1,2、コイル 1 のインピーダンス (複素数表示) はそれぞれ

$$\frac{1}{j\omega C'_{12}},\ \frac{1}{j\omega C'_{34}},\ j\omega L'_{12}$$

であるから、流れる電流を I として、キルヒホッフの法則より、

$$-jI\frac{1}{\omega C'_{12}}-jI\frac{1}{\omega C'_{34}}+jI\omega L'_{12}=0 \tag{3.3.4}$$

を得る。I は 0 ではないので、

$$-\frac{1}{\omega C'_{12}}-\frac{1}{\omega C'_{34}}+\omega L'_{12}=0 \tag{3.3.5}$$

を得る。よって、

$$\omega=\sqrt{\frac{C'_{12}+C'_{34}}{L'_{12}C'_{12}C'_{34}}}$$

となり、周期 T は

$$T=2\pi\sqrt{\frac{L'_{12}C'_{12}C'_{34}}{C'_{12}+C'_{34}}}$$

となる。最後に、各パラメータを与えられた文字で表して、

$$T=\boxed{2\pi\sqrt{\frac{(L_1L_2-M^2)(C_1+C_2)(C_3+C_4)}{(L_1+L_2-2M)(C_1+C_2+C_3+C_4)}}}$$

となる。